Abbildungen

1.16 Def: A, B Mengen

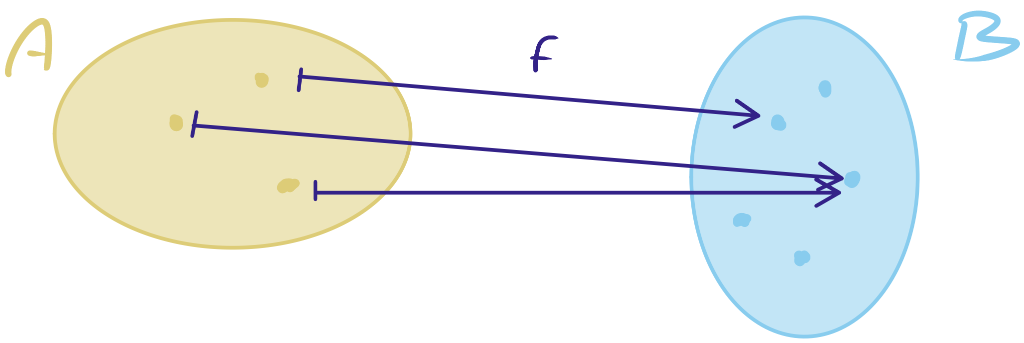
Eine Abbildung $f: A \longrightarrow B$ ist eine Zuordnung, die jedem $a \in A$ genau ein $f(a) \in B$ zuordnet.

A: Definitionsbereich

B: Bildbereich / Wertebereich

Zwei Abbildungen $f: A \longrightarrow B$
$g: A' \longrightarrow B'$

sind gleich, wenn $A = A'$ und $B = B'$ und $\forall a \in A: f(a) = g(a)$.



Beispiele:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2$$

d.h. $f(x) = x^2$

$$g: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$x \longmapsto x^2$$

$g(x) = x^2$

$f \neq g$

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \{0, 1\}$$
$$\boxed{x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}}$$

Abbildungsvorschrift

Wichtige Beispiele:

M beliebige Menge

$$\mathrm{id}_M: M \longrightarrow M$$
$$m \longmapsto m$$

Identität auf M

$N \subseteq M$ beliebige Teilmenge

$$N \longrightarrow M$$
$$n \longmapsto n$$

Inklusion von N in M

N, M beliebig

$$N \times M \longrightarrow M$$
$$(n, m) \longmapsto m$$

Projektion auf M

kartesisches Produkt

$$\prod_{i \in \{1,2\}} M_i = M_1 \times M_2$$

Natürlich ergibt nicht jede Abbildungsvorschrift Sinn. z.B.:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ x &\longmapsto x^2 \notin \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \{0,1\} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

für $x \in \mathbb{Z}$ zweideutig

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \frac{p}{q} &\longmapsto p \end{aligned}$$

nicht eindeutig, z.B. $\frac{1}{1} = \frac{2}{2}$

Diese „Abbildungen" sind nicht wohldefiniert. Es sind gar keine Abbildungen.

1.17 Def: Sei $f: A \to B$ Abbildung

Ist $f(a) = b$ nennen wir:

b das **Bild** von a

a ein **Urbild** von b

Das **Bild** einer Teilmenge $A' \subset A$ ist

$$f(A') := \{ b \in B \mid \exists a' \in A' : f(a') = b \}$$
$$= \{ f(a') \mid a' \in A' \}$$

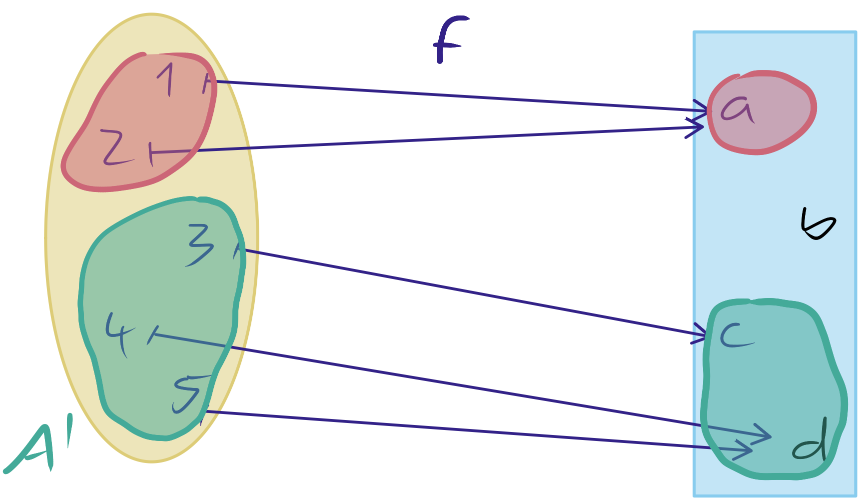
Das **Bild** von f ist $f(A)$.

Das **Urbild** einer Teilmenge $B' \subset B$ ist

$$f^{-1}(B') := \{ a \in A \mid f(a) \in B' \}$$

Die **Faser** eines $b \in B$ ist

$$f^{-1}(b) := f^{-1}(\{b\})$$
$$= \{ a \in A \mid f(a) = b \}$$



$f(A') = \{c, d\}$

$f^{-1}(a) = \{1, 2\}$

$f^{-1}(b) = \emptyset$

1.18 Def: Die Komposition zweier Abbildungen

$$f: A \longrightarrow B$$
$$g: B \longrightarrow C$$

ist die Abbildung

$$g \circ f: A \longrightarrow C$$

„nach"

„verknüpft mit"

mit $(g \circ f)(a) := g(f(a))$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \\
a \arrow[r, mapsto] \arrow[r, bend right, "g \circ f"'] & f(a) \arrow[r, mapsto] & g(f(a))
\end{tikzcd}$$

Reihenfolge beachten!

1.19 Satz:

Komposition ist assoziativ: ist $h: C \longrightarrow D$ weitere Abbildung, so ist $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Ferner ist $id_B \circ f = f = f \circ id_A$.

Beweis:

Definitionsbereich in beiden Fällen A.
Wertebereich " " " D.
Vorschrift: für $a \in A$ gilt

$$\begin{aligned} (h \circ (g \circ f))(a) &= h((g \circ f)(a)) \\ &= h(g(f(a))) \\ &\ \ \ \parallel \\ ((h \circ g) \circ f)(a) &= (h \circ g)(f(a)) \end{aligned}$$

$\square$

1.20 Def: Eine Abbildung $f: A \to B$ ist ein **Isomorphismus von Mengen**, wenn eine Abbildung $A \leftarrow B : g$ existiert, sodass

$$g \circ f = id_A \quad \text{und} \quad f \circ g = id_B .$$

g heißt dann **Umkehrabbildung** von f, geschrieben $g = f^{-1}$.

⚠ Notation f^{-1} wird auch für Urbilder und Fasern verwendet (Def 1.16), selbst dann, wenn keine Umkehrabb. existiert.

Zwei Mengen A, B sind **isomorph**, geschrieben $A \cong B$, wenn ein Isomorphismus zwischen ihnen existiert.

Beispiele:

$$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longmapsto x+1 \\[1em] \mathbb{R} \longleftarrow \mathbb{R} : g \\ x-1 \longleftarrow\!\shortmid\ x \end{array}\right\} \quad f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}$$

$$\{a, b, c\} \cong \{1, 2, 3\}$$

$$\begin{array}{l} a \longmapsto 1 \\ b \longmapsto 2 \\ c \longmapsto 3 \end{array}$$

$$\{a, b, c\} \not\cong \{1, 2\} \qquad \text{(Übung)}$$

1.21 Notiz: Die Umkehrabbildung ist, wenn sie existiert, eindeutig: sind g_1, g_2 zwei Umkehrabbildungen von f, so folgt $g_1 = g_2$:

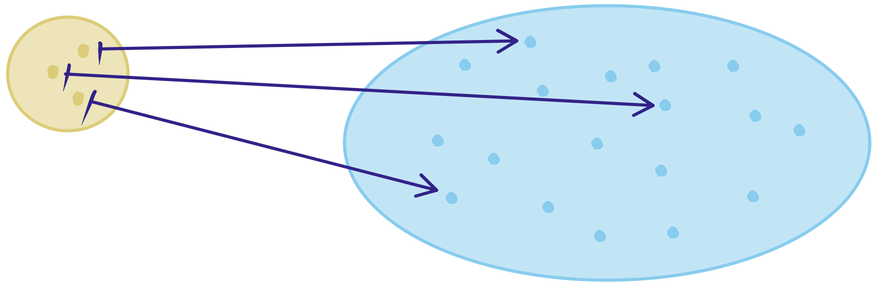
$$g_1 = \overbrace{g_1 \circ f}^{\mathrm{id}} \circ g_2 = g_1 \circ \underbrace{f \circ g_2}_{\mathrm{id}} = g_2$$

1.22 Def: Eine Abbildung $f: A \to B$ ist ...

injektiv ($\hookrightarrow$) $:\Leftrightarrow$ jedes $b \in B$ hat höchstens ein Urbild

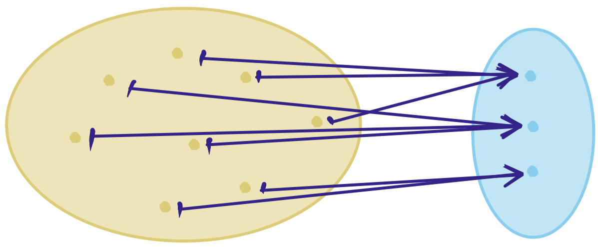
$$\Leftrightarrow \left(\forall a, a' \in A: a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\forall a, a' \in A: f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'\right)$$



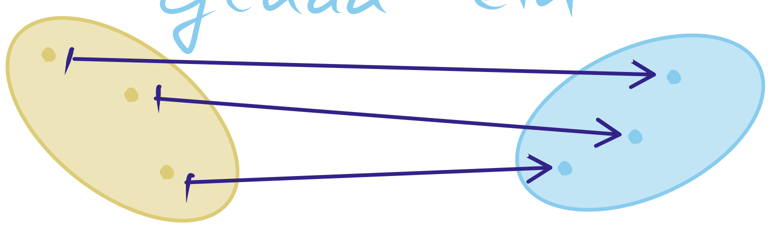
surjektiv ($\twoheadrightarrow$) $:\Leftrightarrow$ jedes $b \in B$ hat mindestens ein Urbild

$$\Leftrightarrow \left(\forall b \in B: \exists a \in A: f(a) = b\right)$$



bijektiv ($\xrightarrow{\cong}$) $:\Leftrightarrow$ jedes $b \in B$ hat genau ein Urbild

$$\Leftrightarrow \left(\forall b \in B: \underbrace{\exists!}_{\text{es existiert genau ein}} a \in A: f(a) = b\right)$$



1.23 Satz: Für eine Abb. f sind äquivalent:

(1) f ist Isomorphismus von Mengen

(2) f bijektiv

(3) f injektiv und surjektiv.

Beweis: Reicht zu zeigen

$$(1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$$

$f: A \to B$

$(1 \Rightarrow 3)$ Sei g Umkehrabb. von f.

f inj: Sei $f(a) = f(a')$ für $a, a' \in A$. Dann ist

$$\underbrace{g(f(a))}_{a} = \underbrace{g(f(a'))}_{a'},$$

also $a = a'$.

f surj: Für gegebenes $b \in B$ ist

$$f(\underbrace{g(b)}_{\in A}) = b.$$

$(3 \Rightarrow 2)$ Übung.

$(2 \Rightarrow 1)$ Sei $f: A \longrightarrow B$ bijektiv.

Zu $b \in B$ $\exists!\, a_b \in A$ mit $f(a_b) = b$.

genau ein

Definiere

$$g: \begin{array}{ccc} A & \longleftarrow & B \\ a_b & \longleftarrow\!\shortmid & b \end{array}$$

$$\boxed{f \circ g = id_B: \quad f(g(b)) = f(a_b) = b \checkmark}$$

$g \circ f = id_A$: $\underbrace{f(g}_{id_B}(f(a))) = f(a)$

$$f(\underline{g(f(a))}) = f(\underline{a})$$

Da f bijektiv, folgt:

$$g(f(a)) = a \qquad \square$$

1.24 Def: Eine Menge M ist

... endlich von Kardinalität $n \in \mathbb{N}$, falls $M \cong \{1, \dots, n\}$.

Notation: $|M| = n$

... unendlich, falls kein solches $n \in \mathbb{N}$ existiert.

Notation: „$|M| = \infty$"

Eine unendliche Menge M ist

... abzählbar unendlich / von Kardinalität $\aleph_0$ „Aleph 0" falls $M \cong \mathbb{N}$.

Notation: $|M| = \aleph_0$

... andernfalls überabzählbar unendlich

$$|M| > \aleph_0$$

1.25 Bemerkung:

Gleichbedeutend für zwei Mengen M, N sind:

$M \cong N$ „M isomorph zu N"

„M und N haben dieselbe Kardinalität"

„M und N stehen in Bijektion"

Beispiele:

$|\mathbb{N}| = \aleph_0$ per Def.

$|\mathbb{N}_0| = \aleph_0$, denn $\mathbb{N} \xrightarrow{\cong} \mathbb{N}_0$
$\qquad\qquad n \longmapsto n-1$

$|\mathbb{Q}_{>0}| = \aleph_0$, denn $\mathbb{Q}_{>0} \cong \mathbb{N}$

Idee:

$$\begin{matrix} \overset{1}{\frac{1}{1}} & \overset{2}{\frac{2}{1}} & \overset{4}{\frac{3}{1}} & \overset{6}{\frac{4}{1}} & \cdots \\ \overset{3}{\frac{1}{2}} & \cancel{\frac{2}{2}} & \overset{7}{\frac{3}{2}} & \frac{4}{2} & \cdots \\ \overset{5}{\frac{1}{3}} & \overset{8}{\frac{2}{3}} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \cdots \\ \overset{9}{\frac{1}{4}} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \cdots \end{matrix}$$

usw.

$|\mathbb{R}| > \aleph_0$ $\quad$ ($\to$ Analysis I ?)

1.26 Satz: Für eine Abbildung $f: A \to B$ zwischen endlichen Mengen derselben Kardinalität sind äquivalent:

(1) f ist bijektiv / ein Isomorphismus

(2) f ist injektiv.

(3) f ist surjektiv.

⚠ Satz ist falsch für ∞ Mengen, z.B. ist
$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$n \longmapsto 2 \cdot n$$
injektiv, aber nicht surjektiv.

Beweis:

Für endliche Mengen A, B gilt:

f injektiv $\iff |f(A)| = |A|$

f surjektiv $\iff f(A) = B$

$\iff |f(A)| = |B|$

Also folgt unter der Voraussetzung $|A| = |B|$ die Äquivalenz (2) $\iff$ (3). $\square$